BLOQUE I: MATEMÁTICA DISCRETA

TEMA 4
GRAFOS

RESUMEN TEÓRICO

1. INTRODUCCIÓN

Problemas como los siguientes (*Introducción a la teoría de grafos* A.Kiselev, Ekaterina Zhukova, Universidad Estatal de San Petersburgo) los habréis visto alguna vez en situaciones de divulgación matemática, planteados más como desafíos que como ejercicios en una asignatura:

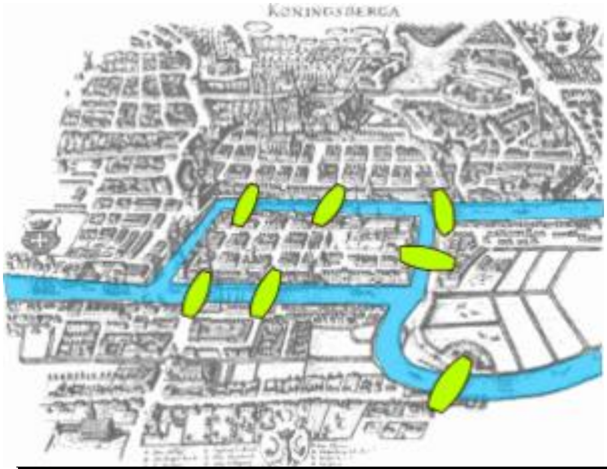
Problema 1.1. En el país de Genovia hay 2013 ciudades. ¿Es posible conectarlas con carreteras de tal manera que salgan 3 carreteras de cada ciudad?

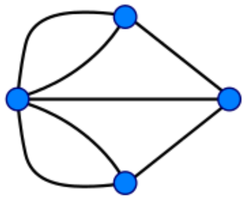
Problema 1.2. Demostrar que si 2013 personas asisten a una reunión y algunas de ellos estrechan la mano con otras (pero no a sí mismas), entonces al .final hay al menos dos personas que han estrechado la mano al mismo número de personas.

Problema 1.3. Demostrar que si 2013 personas asisten a una reunión y todo el mundo estrecha la mano a otros (pero no a sí mismo), entonces al .final se han producido $\frac{2013 \cdot 2012}{2}$ *apretones de manos*.

Todos estos problemas están relacionados con el concepto de grafo. De hecho, el problema más famoso, y que dio lugar a la Teoría de Grafos es el que resolvió el matemático Euler en 1736:

***PROBLEMA DE LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG**: Durante el Siglo XVIII, la ciudad de Königsberg, en Prusia Oriental estaba dividida en cuatro zonas por el río Pregel. Había siete puentes que comunicaban estas regiones, tal y como se muestra en el dibujo. Los habitantes de la ciudad hacían paseos dominicales tratando de encontrar una forma de caminar por la ciudad, cruzando cada puente una sola vez, y regresando al lugar de partida.*





Los objetos de los que trata cada problema (ciudades, personas, etc) serán lo que llamaremos *vértices* del grafo. Para hacer la situación más obvia, se pueden dibujar como puntos en el plano. La representación visual del grafo puede ser útil para entender mejor el concepto. Conectaremos vértices que estén relacionados entre sí (ciudades unidas por carreteras, personas relacionadas entre sí por apretones de manos, etc) por líneas llamadas *aristas*. Se verá un dibujo, parecido a un mapa o algo similar.

Este tipo de proceder puede aplicarse a multitud de problemas, motivo por el cual la Teoría de Grafos ha llegado a ser en los últimos años una importante herramienta matemática que nos sirve para modelizar matemáticamente numerosas situaciones reales relacionadas con disciplinas tan dispares como la investigación operativa, la informática, la lingüística, la química, la genética,… En la Gestión y los Servicios encontramos múltiples aplicaciones en temas tan diversos como redes de transporte y distribución de mercancías, circuitos eléctricos, mapas de carreteras, estructuras de organización,…

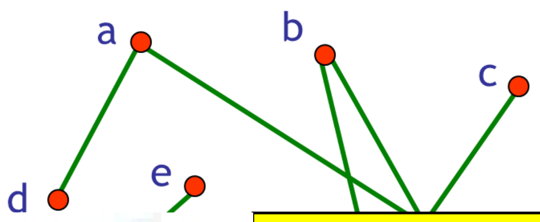
2. GRAFOS NO DIRIGIDOS Y MULTIGRAFOS

DEFINICION 1. Un grafo (no dirigido) $G = (V, E)$ está formado por un conjunto finito de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y un conjunto finito de aristas $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, donde cada arista consiste en un par no ordenado de vértices $\{v_i, v_j\}$.

EJEMPLO 1.

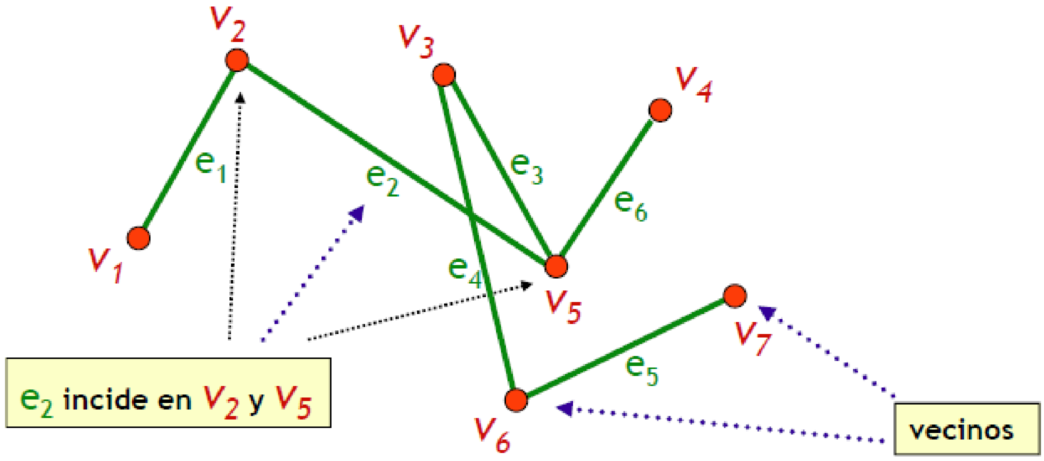
V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l}

E = {{a,d}, {a,f}, {b,f}, {b,k}, {c,f}, {e,j}, {g,k}, {h,l}}



DEFINICION 2. Dos vértices $v_1 v_2 \in V$ son adyacentes o vecinos si la arista $\{v_1, v_2\} \in E$. Si $a = \{v_1, v_2\}$ decimos que la arista a incide en los vértices $v_1 y\ v_2$.

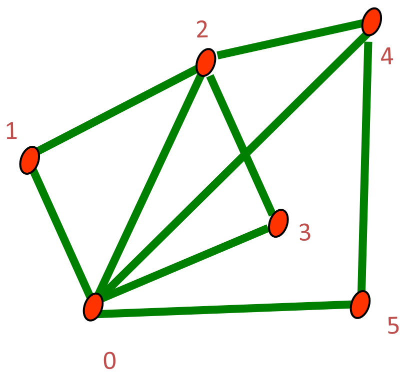
Observación: El orden entre los vértices de una arista no importa. Por eso a veces una arista $\{v_1, v_2\}$ se representa simplemente como $v_1 v_2$



DEFINICION 3. Se llama grado de un vértice v y se denota como $gd(v)$ al número de aristas que inciden en él.

PROPIEDAD 1: Dado un grafo *G= (V ,E)* se verifica que $\sum_{v \in V} gd(v) = 2 \cdot |E|$, esto es, la suma de los grados de todos los vértices del grafos es el doble del número de aristas del grafo.

EJEMPLO 2.



gr(0) = 5

gr(1) = 2

gr(2) = 4

gr(3) = 2

gr(4) = 3

gr(5) = 2

$5 + 2 + 4 + 2 + 3 + 2 = 18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot |E|$

DEFINICION 6. Un grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ es un subgrafo de otro grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ si todos los vértices y las aristas de G_2 están en G_1. Además, G_2 es un subgrafo completo si todas las aristas en E_1 que conectan vértices que están en V_2, están también en E_2.

DEFINICION 7. Un multigrafo (no dirigido) G=(V,E,I) está formado por un conjunto finito de vértices V, un conjunto finito de aristas E y una relación de incidencia $I \subseteq V \times E \times V$, que satisface las dos condiciones siguientes:

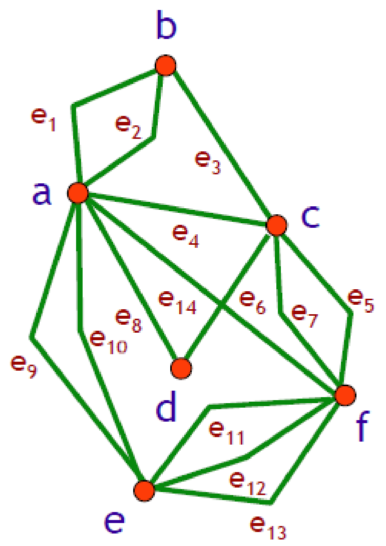
- No se permiten "autoaristas" o bucles, es decir. para todo $x \in V, e \in E$ no se cumple la relación $I(x, e, x)$.
- Si se verifica la relación $I(x, e, y)$, entonces también se verifica la relación $I(y, e, x)$.

Si se cumple $I(x, e, y)$, decimos que la arista *e* conecta los vértices *x* e *y* , y también que la arista *e* es incidente con ellos.

El concepto de grado de un vértice se define para multigrafos igual que para grafos, y del mismo modo se verifica la propiedad sobre la suma de los grados.

OBSERVACIÓN: De modo informal, un multigrafo es un grafo en el que se pueden repetir aristas. Es el caso de los mapas con pueblos y carreteras. El problema ahora es que las aristas no quedan determinadas sólo por los vértices, necesitan nombres.

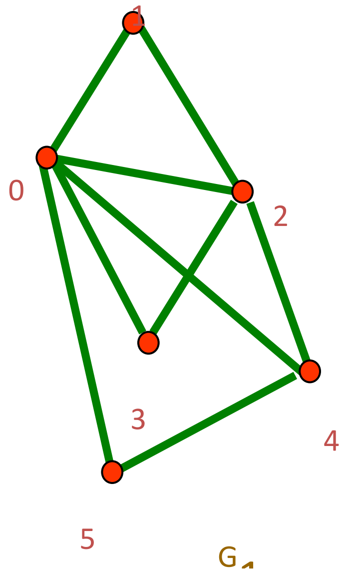
EJEMPLO 3.



Normalmente representaremos los grafos como en el EJEMPLO 1, usando un diagrama en el

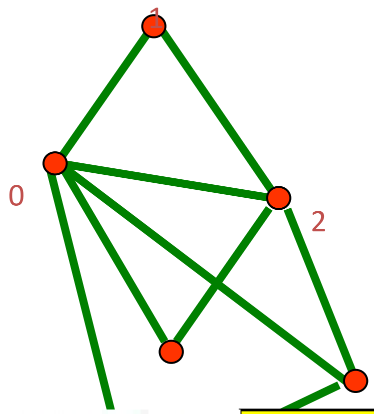
DEFINICION 8. Una <u>tabla de adyacencia</u> es la sucesión de listas en la que cada vértice es la cabeza de lista de todos sus vértices adyacentes (señalamos los vecinos en cada vértice).

EJEMPLO 2.:



0	12345
1	02
2	0134
3	02
4	025
5	04

DEFINICION 9. Dado un grafo *G* con *n* vértices se llama <u>matriz de adyacencia</u> a una matriz booleana de tamaño $n \times n$ de la forma $A = (a_{ij})$ tal que a_{ij} vale 1 si v_i y v_j son vecinos y 0 en otro caso.



	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0
3	1	0	1	0	0	0
4	1	0	1	0	0	1
5	1	0	0	0	1	0

3. RECORRIDO EN GRAFOS Y MULTIGRAFOS

DEFINICIÓN 10 Un recorrido en un multigrafo G=(*V*,*E*,*I*) no dirigido es una sucesión de la forma $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$, donde, para cada $1 \le i \le n$ se verifica la relación $I(v_{i-1}, e_i, v_i)$, es decir, e_i es una arista que conecta v_{i-1} con v_i.

DEFINICIÓN 11 Un recorrido en un grafo no dirigido se puede representar simplemente como

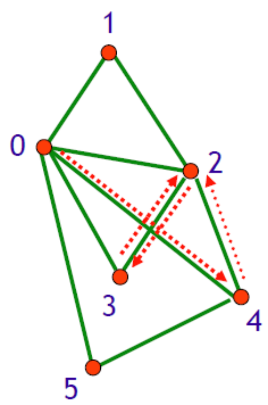
una sucesión de vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$, donde, para cada $1 \le i \le n$ se verifica la relación $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$, es decir, es una arista del grafo.

En ambos casos se dice que:

- El recorrido conecta v_0 (vértice inicial) con v_n (vértice final).
- El número de aristas que se atraviesan a lo largo del recorrido es la longitud del recorrido.

Observación: Un recorrido es entonces una sucesión de vértices $v_0, v_1, \dots, v_n$ de modo que v_i y v_{i+1} son adyacentes. El recorrido "visita" los vértices v_0,, $v_1, \dots, v_n$. Podemos decir que v_0v_1, v_1v_2 ,…, $v_{n-1}v_n$ son las aristas del recorrido y por eso la longitud del recorrido es el número de aristas del recorrido

EJEMPLO 4.



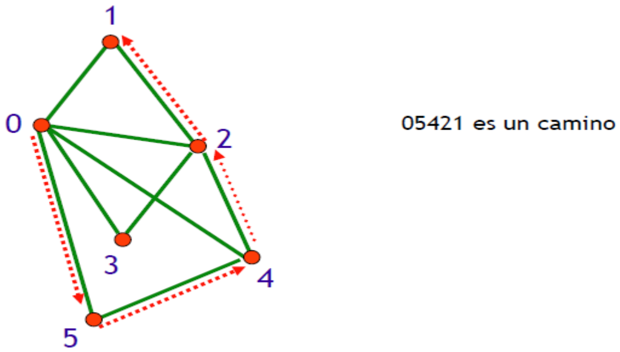
04232 es un recorrido

Entre los recorridos de un grafo, nos interesan aquellos que cumplen ciertas propiedades.

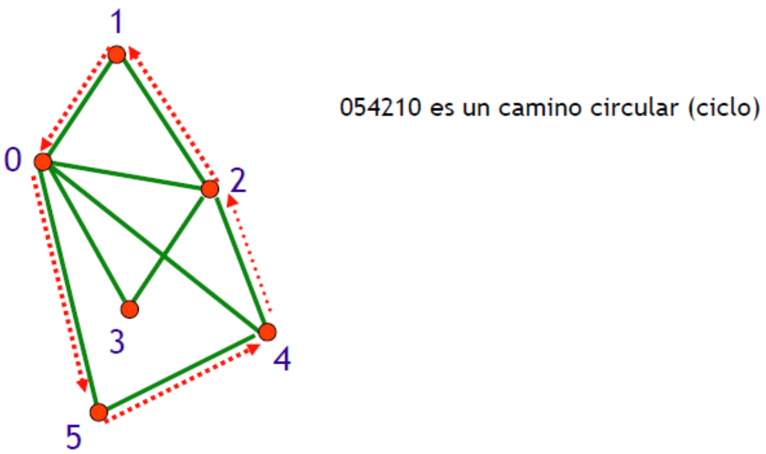
DEFINICIÓN 12 Sea un *R* un recorrido en un multigrafo no dirigido que conecta v_0 (vértice inicial) con v_n (vértice final). Entonces,

a) Si no se repiten vértices antes de llegar al vértice final, se dice que *R* es un camino.

b) Si el vértice final coincide con el inicial se dice que *R* es un recorrido circular o un



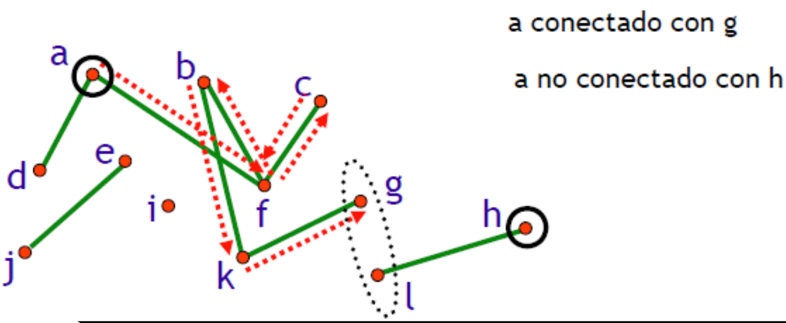
EJEMPLO 6.

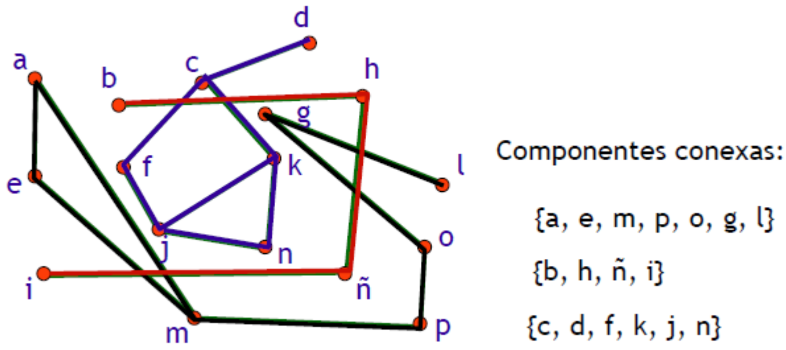


DEFINICIÓN 13 Sean *x* e *y* dos vértices de un multigrafo no dirigido *G*. Diremos que *x* se puede <u>conectar</u> a *y* sí, y sólo sí, se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes, que son equivalentes:

- Existe un camino en *G* que lleva de *x* a *y*.
- Existe un recorrido en *G* que lleva de *x* a *y*.

EJEMPLO 7.



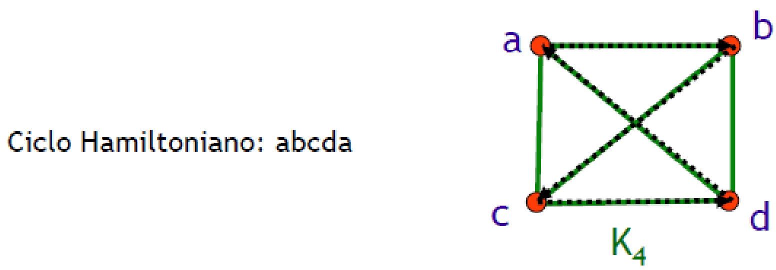


DEFINICIÓN 14 Decimos que un grafo es conexo si tiene una sola componente conexa.

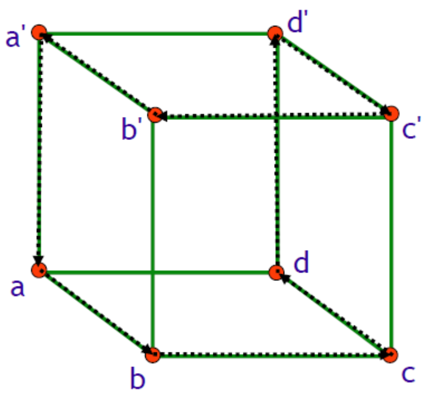
4. CICLOS HAMILTONIANOS. RECORRIDOS EULERIANOS

DEFINICIÓN 15 Un ciclo hamiltoniano es un ciclo que pasa por todos los vértices de un grafo. Un grafo no dirigido es hamiltoniano si contiene un ciclo hamiltoniano.

EJEMPLO 9.

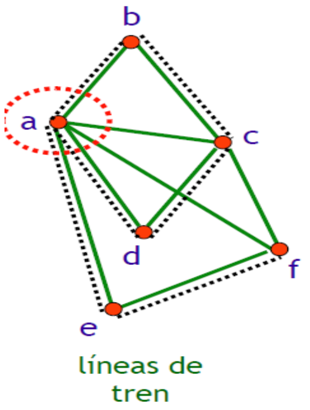


EJEMPLO 10.



Ciclo hamiltoniano: abcdd'c'b'a'a

EJEMPLO 11. Problema del viajante. Un representante comercial vive en d ¿Puede hacer



Lo que nos están preguntando en realidad es si el grafo es hamiltoniano. En este caso no lo es, pues si lo fuera tendría que tener un ciclo hamiltoniano, con lo que tendría aristas ba, bc, ea, ef, da, dc. ¡Pasaría entonces varias veces por la a!

DEFINICIÓN 16 Un circuito que atraviesa cada arista de un multigrafo exactamente una vez es un circuito euleriano y un recorrido euleriano es un recorrido que atraviesa cada arista del multigrafo exactamente una vez.

DEFINICIÓN 17 Un multigrafo es euleriano si contiene un circuito euleriano (acabamos donde empezamos) y semieuleriano si contiene un recorrido euleriano (no se exige acabar donde empezamos), pero no un circuito euleriano (por tanto, el concepto de multigrafo euleriano no es un caso particular del de multigrafo semieuleriano).

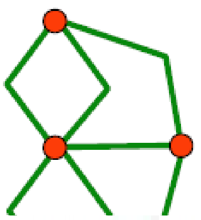
¿¿euleriano implica semieuleriano?

Decidir si un grafo es hamiltoniano es muy difícil (no hay algoritmos que operen en tiempo polinomial), pero el ver si es euleriano o semieuleriano es más fácil.

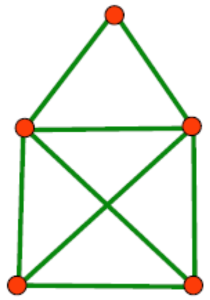
Teorema de Euler: Sea $G=(V, E, I)$ un multigrafo, entonces

- G euleriano sí, y sólo sí, todos vértices de G tienen grado par
- G semieuleriano sí, y sólo sí, dos vértices son de grado impar y el resto de grado par.

EJEMPLO 12. Problema de los puentes de Kröenisberg.



EJEMPLO 13. Problema de "la casita": ¿podemos dibujar la casita empezando y terminando en el mismo vértice sin levantar el lápiz?



Es un grafo semieuleriano, pero no euleriano.

Los grados son 2, 4,4,3,3

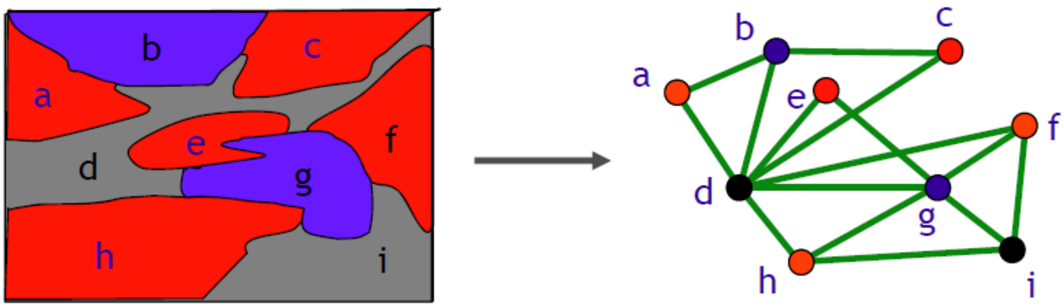
La respuesta es que se puede, pero no acabando donde empezamos.

5. COLOREADO DE GRAFOS

DEFINICIÓN 10 Un <u>coloreado de vértices</u> de un grafo *G*=(*V*,*E*) con *colores* tomados de un conjunto finito *C* es cualquier función $c: V \rightarrow C$ tal que si $\{x, y\} \in E, entonces\ c(x) \neq c(y)$, es decir, vértices adyacentes reciben colores diferentes.

Lo que haremos entonces será marcar los vértices del grafo de modo que vértices vecinos reciban marcas distintas.

EJEMPLO 14. Coloreado de mapas

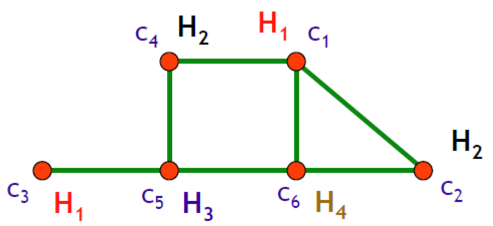


EJEMPLO 15. Asignación de horarios: asignar horarios a 6 cursos de modo que cursos con alumnos comunes no compartan horarios.

Comparten alumnos: c_1 y c_2, c_1 y c_4, c_1 y c_6, c_2 y c_6, c_3 y c_5, c_4 y c_5, c_5 y c_6.

Grafo:

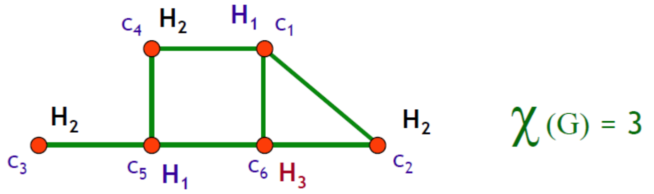
- vértices = $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$
- arista de x a y = “x comparte alumnos con y”



¿Podríamos colorear un grafo con menos colores?

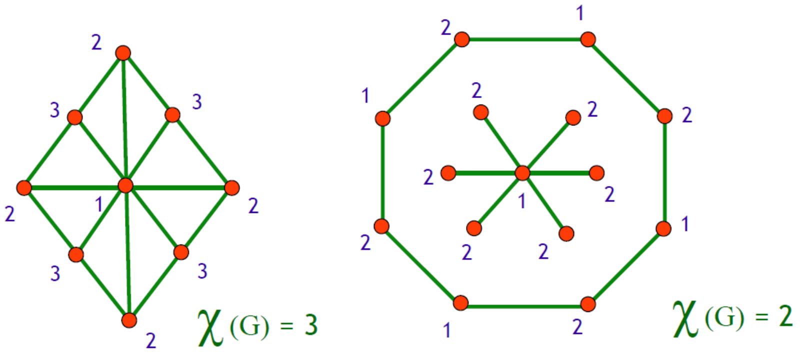
DEFINICIÓN 11 El número cromático $\chi(G)$ de un grafo *G* es el menor número de colores *k* con el que *G* se puede colorear.

EJEMPLO 16.



triángulo a la dcha: no se puede colorear con dos colores

EJEMPLO 17.

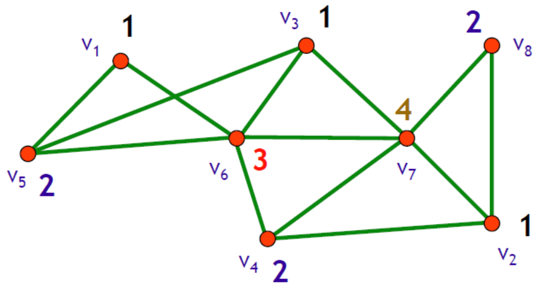


Observación: Si el grafo es completo con *n* vértices, el número cromático es *n*.

ii) Para cada uno de los vértices restantes, se asigna el color con índice más pequeño posible que no haya sido asignado a ningún vértice adyacente.

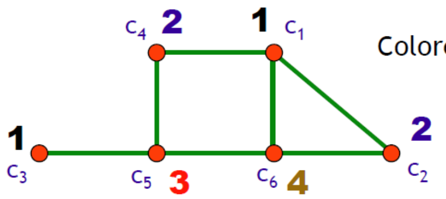
Este algoritmo NO es óptimo, pues el número de colores que se usan en el coloreado depende de la ordenación que inicialmente se elige para los vértices. En consecuencia, una sola aplicación del algoritmo NO garantiza el haber encontrado el número cromático de un grafo dado.

EJEMPLO 18.



Colores = {1, 2, 3, 4, ... }

EJEMPLO 19.



Colores = {1, 2, 3, 4, ... }

En este caso hemos coloreado con 4 colores, pero el número cromático de este caso es 3.